**Teoria miary**
WPPT IIr. semestr zimowy 2012
EGZAMIN POPRAWKOWY

3 lutego 2012

**Zadanie 1.** Miara borelowska $\mu$ na prostej zadana jest dystrybuantą o wzorze

$$F(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1; & 0 \leq t < 1 \\ t^2; & 1 \leq t < 2 \\ 5; & 2 \leq t \end{cases}$$

Oblicz miarę $\mu(A)$ zbioru $A = [0, 2) \setminus \{1\}$.

ROZW.: Miara zbioru $[0, 2)$ to

$$\lim_{t \to 2^-} F(t) - \lim_{t \to 0^-} F(t) = 4 - 0 = 4,$$

a miara zbioru $\{1\}$ jest 0, bo 1 jest punktem ciągłości dla $F$. Zatem szukana miara wynosi 4.

**Zadanie 2.** W przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{F}, \mu)$ dany jest wstępujący ciąg zbiorów mierzalnych $A_n$ o miarach skończonych. Niech $A$ oznacza ich sumę. Udowodnij, że funkcje charakterystyczne zbiorów $A_n$ zbiegają według miary do funkcji charakterystycznej zbioru $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(A) < \infty$.

ROZW.: Niech $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$ i niech $f = \mathbf{1}_A$. Dla dowolnego $\epsilon < 1$ zbiór

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$$

jest po prostu równy $A \setminus A_n$. Żądana zbieżność wdług miary zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\mu(A \setminus A_n) = \mu(A) - \mu(A_n) \to 0$. Jeśli $\mu(A) < \infty$, to taka zbieżność jest równoważna zbieżności $\mu(A_n) \to \mu(A)$, co jest zagwarantowane ciągłością miary z dołu. Jeśli zaś $\mu(A) = \infty$, to ponieważ wszystkie zbiory $A_n$ mają miary skończone, mamy $\mu(A) - \mu(A_n) = \infty$ (dla każdego $n$) i żądana zbieżność do zera nie zachodzi.

**Zadanie 3.** Na prostej dana jest miara borelowska $\mu$ spełniająca (dla dowolnego zbioru borelowskiego $A$) warunek

$$\mu(A) \leq (\lambda(A))^2,$$

gdzie $\lambda$ oznacza miarę Lebesgue'a. Uzasadnij, że $\mu$ jest miarą zerową.

ROZW.: Z warunku wynika, że jeśli $\lambda(A) = 0$, to $\mu(A) = 0$. Czyli $\mu \preccurlyeq \lambda$. Niech $f$ będzie gęstością Radona-Nikodyma, tzn. $\mu = \lambda_f$. Gdyby $f$ nie była funkcją zerową, to istniałaby stała dodatnia $c$ i zbiór $A$ dodatniej miary Lebesgue'a, na którym

$f \geq c$. Niech $B$ oznacza podzbiór zbioru $A$ o mierze Lebesgue'a dodatniej lecz ostro mniejszej od $c$ (taki podzbiór istnieje, bo miara Lebesgue'a jest bezatomowa i każdy zbiór zawiera podzbiór dowolnie małej miary dodatniej). Teraz mamy

$$\mu(B) = \int_B f \, d\lambda \geq \lambda(B) \cdot c > (\lambda(B))^2,$$

sprzeczność.

Tomasz Downarowicz